Berechnung von Volumen und Oberfläche eines Heißluftballons

Tilman Brämick, Robert Clausecker, Sebastion Oltmanns

Wir stellen uns den Heißluftballon als Rotationskörper vor, der durch Rotation einer Funktion um die x-Achse entstanden ist. Wir verwenden eine Funktion, die aus mehreren kubischen Polynomen zusammengesetzt ist; ihre Koeffizienten werden über Stützstellen bestimmt. Die Stützstellen und die dazugehörigen Messwerte finden Sie in Tabelle 1.

Tabelle 1: Stützstellen der Ballonfunktion

x-Wert	0,0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
y-Wert	0,8	1,3	1,75	2,2	2,6	3,1	3,5
x-Wert	3,5	4,0	4,5	5,0	5,5	6,0	6,5
y-Wert	3,8	4,1	4,3	4,5	4,6	4,6	4,6
x-Wert	7,0	7,5	8,0	8,5	9,0	9,4	9,8
y-Wert	4,5	4,3	4,0	3,6	3,0	2,0	0,0

1 Berechnung des Volumens

Zur Berechnung des Ballonvolumens approximieren wir die Funktion mithilfe von kubischen Polynomen. Ein kubisches Polynom ist durch vier Stützstellen eindeutig bestimmt, zwei benachbarte Polynome teilen sich die Stützstelle zwischen ihnen. Da 21 Stützstellen gemessen wurden, erhalten wir also zehn Polynome $f_1 \ldots f_{10}$.

Wir bestimmen das Rotationsvolumen mit der Formel (1).

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx \tag{1}$$

$$V_{\text{Ballon}} = \pi \left(\int_0^1 f_1(x)^2 \, dx + \int_1^2 f_2(x)^2 \, dx + \cdots + \int_8^9 f_9(x)^2 \, dx + \int_9^{9,8} f_{10}(x)^2 \, dx \right) \tag{2}$$

Wir werten dieses Integral über die Integrale der Polynomfunktionen aus. Dazu nutzen wir die Keplersche Fassregel. Dabei lassen sich die ersten zehn Integrale mit der Simpsonschen

Regel zusammenfassen. f_{11} benötigt eine Sonderbehandlung, da die letzte Stützstelle einen anderen Abstand hat.

$$V_a^b = \frac{b-a}{6n}\left[f(a)^2 + f(b)^2 + 2\sum_{k=1}^{n-1} f_k(k)^2 + 4\sum_{k=1}^{n} f_k\left(\frac{2k-1}{2}\right)^2\right] \tag{3}$$

In Gleichung (3) setzen wir $a = 0$ und $b = 9$ ein.

$$V_0^9 \approx \frac{9}{54}\left[0{,}64 + 9 + 2(116{,}5425) + 4(122{,}84)\right] = \frac{1}{6} \cdot 734{,}085 = 122{,}3475 \tag{4}$$

Das letzte Integral wird mit Hilfe der Keplerschen Fassregel berechnet.

$$v_9^{9,8} \approx \frac{0{,}8}{6}(9 + 16 + 0) = \frac{10}{3} \approx 3{,}33 \tag{5}$$

Das Rotationsvolumen beträgt also $\pi\left(V_0^9 + V_9^{9,8}\right) \approx 394{,}838$. Weil alle Stützstellen in Zentimetern von der Skizze abgelesen wurden, ist die Einheit des errechneten Volumens Kubikzentimeter. Es muss nun umgerechnet werden. $1\,\mathrm{cm}$ in der Skizze entsprechen ca. $1{,}3\,h$, $1\,\mathrm{cm}^3$ entspricht also ungefähr $5{,}8\,h^3$. $394{,}838\,\mathrm{cm}^3 = 394{,}838 \cdot 5{,}8\,h^3 = 2290{,}0604\,h^3$. Wegen $h = 1{,}38\,m$ und $h^3 = 2{,}63\,m^3$ ergibt sich $2290\,h^3 \approx 2290 \cdot 2{,}63\,m^3 = 6022{,}7\,m^3$.

2 Berechnung der Mantelfläche

Die Mantelfläche wird durch die Formel (6) berechnet.

$$M = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2} \tag{6}$$

Weil keine Funktion über dem Intervall $[0, 9{,}8]$ vorliegt, muss das Integral zur Berechnung der Mantelfläche aufgeteilt werden. Hierfür benutzen wir wieder die anfangs gemessenen Stützstellen. Es wurden 21 Stützstellen gemessen, aus diesen erstellen wir die linearen Funktionen $g_0, g_{0,5}, \ldots, g_{9,5}$ (20 Funktionen). Die Funktion g_k verläuft dabei durch die Stützstellen bei $x = k$ und $x = k + 0{,}5$.

Nach Zerlegung in 20 Abschnitte und Summieren der Integrale erhalten wir den ungefähren Wert 41,89 für das Integral von 0 bis 9,8. Nach Einsetzung in die Formel zur Berechnung der Mantelfläche ergibt sich die Näherung $2\pi \cdot 41{,}89 \approx 263{,}203$. Da erneut alle Werte in cm von der Skizze abgelesen wurden, muss umgerechnet werden. Analog zu Teil 1 ergibt sich

$$M = 1624{,}03\,m^3 \tag{7}$$