# 1 Einführung

Die Variationsrechung findet in vielen (anwendungsorientierten) Problemen der Mathematik Anwendung. Im Allgemeinen versucht man eine Einsetzung $u(x)$ in eine Funktion $F(x, u(x), u'(x))$ zu finden, sodass (1.1) minimal wird.

$$J(u) = \int_b^a F(x, u(x), u'(x)) \, \mathrm{d}x \tag{1.1}$$

Dabei können verschiedene Randbedingungen an die Funktion $u(x)$ gestellt werden.

Die folgenden Probleme demonstrieren die Fragestellung.

## 1.1 Die Barystochrone

Gegeben seien zwei Punkte $A$ und $B$ in einer Ebene. Es wirke ein homogenes Gravitationsfeld, das eine konstante Fallbschleunigung $g$ ausübt in negative $y$-Richtung. Sei $u(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, deren Graph durch die Punkte $A$ und $B$ geht. Nun setzt man eine ideale, punktförmige Kugel auf den Punkt $A$ und lässt diese zum Punkt $B$ auf dem Graphen von $u$ rollen. Für welches $u(x)$ ist die Rolldauer minimal?

$$v_{\text{Hor}} = \sqrt{\frac{2gu(x)}{1 + u'(x)^2}} \tag{1.2}$$

Unter Anwendung verschiedener physikalischer Formeln ergibt sich die Gleichung (1.2) für die Horizontalgeschwindigkeit $v_{\text{Hor}}$ der Kugel. Integration über die $x$-Koordinate liefert die Rolldauer; diese Größe möchten wir minimieren.

$$s = \int_a^b v_{\text{Hor}}(x) \, \mathrm{d}x = \int_a^b \sqrt{\frac{2gu(x)}{1 + u'(x)^2}} \, \mathrm{d}x \tag{1.3}$$

## 1.2 Minimalfläche

Wir betrachten den Rotationskörper um die $x$-Achse einer Funktion $u(x)$ zwischen den Stellen $a$ und $b$. Nach den guldinschen Regeln hat dieser die Mantelfläche aus (1.4).

$$M = \int_b^a u(x)\sqrt{1 + u'(x)^2}\,\mathrm{d}x \tag{1.4}$$

Welche Funktion $u(x)$ hat die minimale Mantelfläche $M$, wenn ihr Graph durch bestimmte Punkte läuft?

# 2 Abstände zwischen Funktionen und Stetigkeit des Funktionals

Um Differentialrechung betreiben zu können, benötigt man einen Ableitungsbergriff und für diesen wiederum einen Abstand. Im Folgenden gilt es, den Abstand zwischen zwei Funktionen zu berechnen. Doch was verlangen wir eigentlich von diesem Abstand?

1. Der Abstand ist eine nicht-negative, reele Zahl, Dinge ohne Abstand sind einander gleich
2. Der Abstand ist symmetrisch:
3. Die Gerade ist die kürzeste Verbindung

## 2.1 Exakte Mathematisierung

Ein Abstand wird durch eine Funktion $\mathrm{d} : X \times X \to [0, \infty[$ mit folgenden Eigenschaften beschrieben.

1. $\mathrm{d}(x, y) \geq 0, \mathrm{d}(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $\mathrm{d}(x, y) = \mathrm{d}(y, x)$

3. $\mathrm{d}(x,y) \leq \mathrm{d}(x,z) + d(z,y)$

Für stetige Funktionen auf einem abgeschlossenen Intervall $[a,b]$ lässt sich ein natürlicher Abstand wie in (2.1) definieren.

$$\mathrm{d}(f,g) := \max_{x\in[a,b]} \{|f(x) - g(x)|\} \tag{2.1}$$

Wir wollen jetzt die Grenzwertdefinition auf Funktionen übertragen, deren Argumente Funktionen sind, damit wir sie für Funktionen wie (1.1) verwendet können. Wir definieren:

$$\begin{aligned} \lim_{u\to u_0} J(u) = y_0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall u \in C^1([a,b]) \\ 0 < \mathrm{d}(u,u_0) < \delta \Rightarrow |J(u) - y_0| < \varepsilon \end{aligned} \tag{2.2}$$

Gilt: $\lim_{u\to u_0} J(u) = J(u_0)$? Also: Ist $J$ stetig? Eine intuitive Rechnung ergibt:

$$\begin{aligned} \lim_{u\to u_0} J(u) &= \lim_{u\to u_0} \int_a^b F(x,u(x),u'(x))\,\mathrm{d}x \\ &= \int_a^b \lim_{u\to u_0} F(x,u(x),u'(x))\,\mathrm{d}x \\ &= \int_a^b F(x,u_0(x),u_0'(x))\,\mathrm{d}x \quad \text{(falls } F \text{ stetig.)} \end{aligned}$$

Jedoch nähern sich bezüglich unseres Abstandsoperators bei $u \to u_0$ die Ableitungen $u'$ und $u_0'$ nicnicht zwangsläufig einander an, weshalb die zweite Gleichheit nicht gesichert ist. Ein Gegenbeispiel liefert die Folge $u_n(x) := \int_0^x t^n\,\mathrm{d}t$ auf $[0;1]$, die bezüglich d gegen die Nullfunktion konvergiert, deren Ableitung aber nicht punktweise gegen 0 geht.

Wir definieren daher einen neuen Abstand d, für den $\mathrm{d}(u,u_0) \to 0 \Leftrightarrow u \to u_0 \wedge u' \to u_0'$ gilt:

$$d(f,g) := \max_{x\in[a,b]} \{|f(x) - g(x)|\} + \max_{x\in[a;b]} \{|f'(x) - g'(x)|\} \tag{2.3}$$

Nun gilt es noch zu zeigen, dass (2.4) eine gültige Umformung ist.

$$\int_a^b \lim_{u\to u_0} F(x, u(x), u'(x)) \,\mathrm{d}x = \int_a^b F(x, u(x), u'(x)) \,\mathrm{d}x \tag{2.4}$$

Dies ist mit dem folgenden Satz zu begründbar:

**Satz 2.1.** *Sei* $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *stetig und* $\max_{x\in[a,b]} \{|f_n(x) - f(x)|\} \to 0$. *Dann gilt (2.5).*

$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x) \,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x) \,\mathrm{d}x \tag{2.5}$$

Daraus folgt die Stetigkeit von $J$, wenn $F$ stetig ist.

# 3 Die erste Variation

Nun sind wir soweit, die Ableitung von (1.1) zu berechnen. Diese schreiben wir als $DJ_u(v)$ wobei $v$ die Richtung angibt, in welche die Ableitung bestimmt wird. Wir definieren die erste Variation analog zur $h$-Methode bei normalen Ableitungen:

$$\begin{aligned}
DJ_u(v) : &= \lim_{t\to 0} \frac{J(u+tv)J(u)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \int_a^b \frac{J(F(x, u+tv, u'+tv')) - F(x,u,v)) \,\mathrm{d}x}{t} \\
&= \int_a^b \lim_{t\to 0} \frac{J(F(x, u+tv, u'+tv')) - F(x,u,v)) \,\mathrm{d}x}{t}
\end{aligned}$$

Dabei ist zu beachten, dass der letzte Schritt nicht so einfach funktioniert, wie es aussieht, aber wir können das mitähnlichen Argumentationen wie bei der Stetigkeit zeigen, was wir hier jedoch nur umreißen. Dazu benutzen wir die Dreiecksungleichung und den Mittelwertsatz. Das Vertauschen von Grenzwert und Integral ist mit der selben Argumentation, wie für die Stetigkeit benötigt. Daraus lässt sich die Berechnung der ersten Variation zu:

$$DJ_u(v) = \int_a^b \left[ \frac{\partial F}{\partial y}(u, u(x), u'(x))v(x) + \frac{\partial F}{\partial z}(u, u(x), u'(x))v'(x) \right] \, \mathrm{d}x$$

mit $v \in C_0^1([a, b]) = v \in C^1([a; b]) : v(a) = v(b) = 0$.

Da wir nur die Funktion betrachten, die die Randbedingungen $u(a) = A$ und $u(b) = B$ erfüllen, kann $u(a) + tv(a) \neq u(a) = A$ nicht gelten, also muss $v(a) = 0$ sein. Dies gilt genauso für v(b), dies wird mit $C_0^1([a; b])$ festgelegt. Nun können wir mit der gerade definierten Ableitung Minima der Funktion $J(u)$ bestimmen. Die Notwendige Bedingung für ein Minimum ist bekanntlich, dass die Ableitung gleich null ist. In diesem Fall gibt es jedoch unendlich viele Ableitungen, für alle Funktionen $v \in C_0^1([a, b])$ jeweils eine. Die Notwendige Bedingung ist in diesem Fall logischerweise, dass für alle Funktionen $v \in C_0^1([a; b])$ die Ableitung gleich null is, d. h. wenn für alle $v \in C_0^1([a; b])$ $DJ_u(v) = 0$ gilt.

## 3.1 Die Euler-Lagrange-Gleichungen

Die notwendige Bedingung führt zu einer Differentialgleichung. Ist $u$ lokales Minimum von (1.1) so gilt die notwendige Bedingung (3.1).

$$\forall v \in C_0^1([a, b]) \quad DJ_u(v) = 0 \tag{3.1}$$

Durch Einsetzung in die o. g. Formel für die erste Variation ergibt sich:

$$\int_a^b \frac{\partial F}{\partial y}(x, u, u')v(x) + \frac{\partial F}{\partial z}(x, u, u')v' \, \mathrm{d}x = 0 \quad \forall v \in C_0^1([a; b])$$

Nach Partieller Integration des zweiten Terms mit Aufleitung von $v$ verhält man:

$$\int\limits_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y}(x,u(x),u'(x))v(x)\mathrm{d}x - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial z}(x,u(x),u'(x)\right] v(x)\ \mathrm{d}x = 0$$

Jetzt benutzen wir das sogenannnte Fundamentallemma der Variationsrechnung, welches wie folgt lautet.

**Satz 3.1.** *Fundamentallemma der Variationsrechnung Ist* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *stetig und es gelte:*

$$\int\limits_a^b f(x)v(x)\ \mathrm{d}x = 0 \quad \forall v \in C_c^\infty(]a,b[)$$

*so folgt:* $f \equiv 0$

*Dabei bezeichnet* $C_c^\infty(]a,b[)$ *die Menge der unendlich oft differenzierbaren Funktionen auf* $]a,b[$*, die außerhalb eines abgeschlossenen Teilintervalls innerhalb von* $]a,b[$ $0$ *sind.*

Damit kann man $v$ aus obrigen Termen eliminieren und erhält:

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,u(x),u'(x)) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial z}(x,u(x),u'(x)) = 0$$

Diese Gleichung nennt man *Euler-Lagrange-Gleichung*, man kann sie in den meisten Fällen nach $u(x)$ auflösen.

## 3.2 Hinreichende Bedingungen für Minimierer

Wie bei normalen Funktionen wollen wir untersuchen ob die 2. Ableitung $(D^2 J_u(v))$ hinreichendes Kriterium für ein Minimum ist.

Falls u ein Minimum, so gilt: $D^2 J_u(v) \geq 0 \quad \forall v \in C_0^1([a;b]$

Aus $DJ_u(v) = 0$ und $D^2 J_u(v) > 0 \quad \forall v \neq 0$, folgt aber nicht, dass $u$ ein lokales Minimum ist.

Es ist zum Beispiel:

$$\begin{aligned} J(u) &= \int_{-1}^{1} x^2(u'(x))^2 + x(u'(x))^3 \,\mathrm{d}x \\ DJ_u(v) &= \int_{-1}^{1} [2u'(x)x^2 + 3(u'(x))^2 x]v'(x) \,\mathrm{d}x \\ D^2J_u(v) &= \int_{-1}^{1} [2x^2 + 6u'(x)x]v'(x)^2 dx \end{aligned}$$

Betrachten wir $u_0 \equiv 0$ so ist $DJ_{u_0}(v) = 0$ und $D^2J_{u_0}(v) > 0 \quad \forall v \neq 0$, aber $u$ ist kein lokales Minimum.

Aber wenn $D^2J_u(v) > 0 \quad \forall v \in C_0^1([a;b])$ und für jedes $u \in C^1([a;b])$, welches die passenden Randbedingungen erfüllt (d. h. die 2. Ableitung ist überall größer als 0), so ist jeder Punkt $u$ mit $DJ_u(v) = \quad \forall v \in C_0^1([a;b])$ ein lokales Minimum.