1. Aufgabe

Sei $Z(n)$ die Multimenge aller Ziffern einer Zahl n zur Basis 10, z. B. ist $Z(10225) = \{1, 0, 2, 2, 5\}$. Ferner sei $M = \{2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 7, 7, 8, 8, 9, 9\}$ und $Q(n) = \sum Z(n)$ die Quersumme von n.

Beweis durch Widerspruch

Angenommen es existieren natürliche Zahlen A und B, die eine Lösung der Aufgabenstellung sind. Per Aufgabenstellung muss $Z(A) \uplus Z(B) = M$ und $A : B = 2 \Leftrightarrow A = 2B$ gelten. Nach dem Quersummensatz gilt $\bigwedge_a a \equiv Q(a) \mod 3$. Offensichtlich ist auch $\bigwedge_{a,b} Q(a) + Q(b) = \sum Z(a) \uplus Z(b)$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
Q(a) + Q(b) &= \sum Z(a) \uplus Z(b) \\
Q(A) + Q(B) &= \sum M \\
Q(A) + Q(B) &= 70 \\
A + B &\equiv 1 \bmod 3 \\
2B + B &\equiv 1 \bmod 3 \\
0 &\equiv 1 \bmod 3
\end{aligned}$$

Dies ist ein Widerspruch. Daher können keine derartigen A und B existieren. *q. e. d.*

2. Aufgabe

Beweis durch Widerspruch

Angenommen es existieren positive ganze Zahlen a, b, c und d sodass $a^2 + 4b = c^2$ und $b^2 + 4a = d^2$. Wegen $\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} n^2 \equiv n \mod 2$ ist $a^2 + 4b \equiv c^2 \mod 2 \Leftrightarrow a \equiv c \mod 2$. Also existiert ein k sodass $c = a + 2k$:

$$\begin{aligned}
a^2 + 4b &= (a + 2k)^2 \\
a^2 + 4b &= a^2 + 4ak + 2k^2 \\
4b &= 4ak + 4k^2 \\
b &= ak + k^2 \\
b &= a + a(k - 1) + k^2
\end{aligned}$$

a, b und k sind alle positive ganze Zahlen. Daher ist $a(k - 1) + k^2 > 0$, sodass $b > a$ gilt. Analog lässt sich über die Gleichung $b^2 + 4a = d^2$ zeigen, dass $a > b$ gilt. Weil die Menge der ganzen Zahlen total geordnet sind, ist dies ein Widerspruch. Es kann also keine positiven ganzen Zahlen a und b geben, die die Aufgabenstellung erfüllen. *q. e. d.*

4. Aufgabe

Seien die Ecken des 27-Ecks der Reihe nach mit $C_1, C_2, \ldots, C_{27}$ bezeichnet. Der Eckabstand $D(C_n, C_m)$ sei die um 1 verminderte Anzahl der Ecken, die sich einschließlich C_n und C_m auf der kürzeren Seite zwischen den beiden Ecken befinden.

Lemma A

Drei paarweise verschiedene Ecken $C_a C_b$ und C_c, die in dieser Reihenfolge auf dem 27-Eck liegen, formen ein gleichschenkliges Dreieck mit Scheitel C_b, wenn $D(C_a, C_b) = D(C_b, C_c)$.

Beweis Ein regelmäßiges 27-Eck ist 27-fach drehsymmetrisch um seinen Mittelpunkt. Aus diesem Grund ist $|C_a C_b| = |C_b C_c|$. Ein Dreieck mit zwei gleichenlangen Seiten ist gleichschenklig. *q. e. d.*

Lemma B

Vier paarweise verschiedene Ecken C_a, C_b, C_c und C_d, die in dieser Reihenfolge auf dem 27-Eck liegen, formen ein gleichschenkliges Trapez mit $C_a C_d \parallel C_b C_c$, wenn $D(C_a, C_b) = D(C_c, C_d)$.

Beweis Ähnlich wie beim Lemma A ist aus Symmetriegründen $|C_a C_b| = |C_c C_d|$. Es muss außerdem $D(C_a, C_c) = D(C_b, C_d)$ gelten:

$$
\begin{aligned}
D(C_a, C_c) &= D(C_b, C_d) \\
D(C_a, C_b) + D(C_b, C_c) &= D(C_b, C_c) + D(C_c, C_d) \\
D(C_a, C_b) &= D(C_c, C_d)
\end{aligned}
$$

Daher ist auch $|C_a C_c| = |C_b C_d|$. Ein Viereck, dessen zwei gegenüberliegende Seiten gleich lang sind, ist ein gleichschenkliges Trapez, wenn auch die Diagonalen gleich lang sind. *q. e. d.*

Beweis durch Widerspruch

Angenommen es würden Indizes $i_1 < i_2 < \cdots < i_7$ existieren, sodass die zugehörigen Eckpunkte $C_{i_1}, C_{i_2}, \ldots, C_{i_7}$ weder ein gleichschenkliges Dreieck noch Trapez formen, dann müssten alle Eckabstände zwischen zwei aufeinanderfolgenden Ecken (und $D(C_7, C_1)$) ungleich sein: Sind zwei direkt aufeinanderfolgende Eckabstände gleich, so bildet sich nach Lemma A ein gleichschenkliges Dreieck zwischen den beteiligten Ecken, sind hingegen zwei nicht direkt aufeinander folgende Eckabstände gleich, so bildet sich nach Lemma B analog ein gleichschenkliges Trapez.

Die Summe aller Eckabstände muss der Anzahl der Ecken, 27, gleichen. Die kleinste mögliche Summe von sieben paarweise verschiedenen Eckabstände ist aber 28; die Summe der natürlichen Zahlen von 1 bis 7. Mindestens zwei Eckabstände müssen also gleich sein, es lässt sich also bei jeder Auswahl von 7 Ecken ein gleichschenkliges Dreieck oder Trapez finden. *q. e. d.*