## Material

Es wurden folgende Quellen verwandt:

- Concrete Mathematics von Ronald L. Graham, Donald E. Knuth und Oren Patashnik. Erschienen 1994 im Addison-Wesley-Verlag. ISBN 0-201-55802-5
- Formelsammlung Geometrie von Birgit Vera Schmidt. Verfügbar unter der Adresse http://www.scribd.com/doc/75946912
- Mathematische Formelsammlung von Dr. Franz Brzoska und Walter Bartsch. Erschienen 1956 im Fachbuchverlag Leipzig.

Ferner wurden folgende Programme zum Erkenntnissgewinn oder zur Darstellung eingesetzt:

- XeLaTeX (http://xetex.sourceforge.net)
- GeoGebra (http://www.geogebra.org)
- Wolfram Alpha (http://www.wolframalpha.com)

Aufgrund technischer Probleme sind die zubehörigen Skizzen nicht in diesem Dokument enthalten. Sie sind in den anderen Blättern der Einsendung zu finden.

# 1 Aufgabe 1

$\#M$ sei die Anzahl der Elemente der endlichen Menge $M$, $n$ sei eine natürliche Zahl. Sei $G = \{1, 2, \ldots, 2n\}$, seien $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ aus $G$ paarweise verschieden gewählt, $b_1 > b_2 > \cdots > b_n$ seien alle anderen Elemente aus $G$. Ferner seien:

$$N = \{1, 2, \ldots, n\} \tag{1}$$
$$\bar{N} = G \setminus N \tag{2}$$
$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \tag{3}$$
$$B = N \setminus A = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\} \tag{4}$$

## 1.1 Vermutung

Laut Aufgabenstellung ist zu zeigen, dass folgende Aussage wahr ist.

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k - b_k| = n^2 \tag{5}$$

## 1.2 Beweis

Zu zeigen ist zunächst der Hilfssatz (6).

$$\bigwedge_{k \in N} a_k \leq n \leftrightarrow b_k > n \tag{6}$$

Per Voraussetzung ist $\#A = \#B = n$. Nun sei $m = \#(N \cap A)$. Es ist nun $\#(\bar{N} \cap A) = n - m$. Weil jedes Element aus $G$ (und somit auch jedes aus jeder ihrer Teilmengen) entweder Element von $A$ oder Element von $B$ ist, muss auch $\#(N \cap B) = n - m$ und $\#(\bar{N} \cap B) = m$ gelten. Weil $N$ die niedrigsten $m$ Elemente aus $G$ enthält, muss demnach $N \cap A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ sein, analog ist $\bar{N} \cap B = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$. Für alle $1 \leq k \leq m$ ist also $a_k \leq n$ und $b_k > n$, für alle $m < k \leq n$ ist $a_k \notin N \leftrightarrow a_k > n$. Analog ist dann auch $b_k \leq n$. Damit ist jeder Fall von (6) beschrieben. *q. e. d.*

Aus (6) folgt, dass in jedem Term der Summe (5) genau eine der Variablen $a_k$ und $b_k$ größer als $n$ ist, die andere ist kleiner oder gleich $n$. Dadurch lassen sich die Betragsstriche entfernen – jene der Variablen eines Termes, die in $N$ liegt ist immer der Subtrahend, und die andere, in $\bar{N}$ liegende, per Definition größere, ist immer der Minuend. Jedes Element von $G$ tritt in der Summe (5) genau einmal auf. Unter diesen Beobachtungen kann man die Summe neu gruppieren: Es wird die Summe aller Elemente von $N$ von der Summe aller Elemente von $\bar{N}$ abgezogen:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} |a_k - b_k| &= \sum_{k \in \bar{N}} k - \sum_{k \in N} k = \sum_{k=n+1}^{2n} k - \sum_{k=1}^{n} k \\ &= \sum_{k=1}^{2n} k - 2\sum_{k=1}^{n} k = \frac{2n(2n+1)}{2} - \frac{2n(n+1)}{2} = n^2 \end{aligned} \tag{7}$$

Die Summe beträgt $n^2$, die Aussage ist bewiesen. *q. e. d.*

# 2 Aufgabe 2

Alle in dieser Aufgabe angegebenen Variablen sind natürliche Zahlen. $\#M$ bezeichne die Anzahl der Elemente der endlichen Menge $M$. Alle in dieser Aufgabe verwendeten Variablen seien natürliche Zahlen oder Mengen von diesen.

## 2.1 Vorüberlegungen

Es ist nicht relevant wie viele Kugeln in den jeweiligen Schalen zu liegen kommen. Aus diesem Grund reicht es, die Menge der mit Kugeln befüllten Schalen zu bestimmen. Ich modelliere die $n$ Schalen als Reste $0 \ldots n-1$ modulo $n$. Die Position der Urne, die beim $n$-ten Ablagevorgang abgelegt wird, ist über die Summer der insgesamt weitergegangenen Schalen zu bestimmen. Es handelt sich um die Summe $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, die $n$-te Dreieckszahl, modulo $n$.

Die $n$-te Dreieckszahl sei mit $\Delta_n$ bezeichnet, $G_n = \{\Delta_k \bmod n | k \in \mathbb{N}\}$ sei die Menge der Schalen, in die eine Murmel gelegt wird. Da es nur endlich viele Schalen gibt, gibt es eine Schale in dieser Menge, in die von allen Schalen zuletzt die erste Murmel gelegt wurde. Nach diesem Schritt ändert sich die Menge der Urnen mit Murmel drin nicht mehr. Es ist also immer möglich, alle Elemente $G_n$ aus nur endliche vielen Dreieckszahlen zu bestimmen, ich nehme aus Gründen der Einfachheit aber trotzdem an, dass ich die Reste aller Dreieckszahlen nutze.

Genau dann, wenn $G_n$ nach endlich vielen Schritten genau $n$ Elemente enthält, terminiert das Verfahren von Anja. Ob das Verfahren für $n$ Urnen terminiert, sei mit $T(n) \leftrightarrow \#G_n = n$ bezeichnet.

## 2.2 Vermutung

Ich vermute, dass Anjas Verfahren genau dann terminiert, wenn $n$ eine Potenz von zwei ist:

$$T(n) \leftrightarrow \bigvee_k n = 2^k \tag{8}$$

## 2.3 Beweisidee

Eine jede natürliche Zahl lässt sich mit ungeradem $a$als $a \cdot 2^b$ darstellen. Der nachfolgende Beweis basiert auf dem Prinzip der vollständigen Induktion. Es wird gezeigt, dass $T(a)$ für ungerade $a$ genau dann gilt, wenn $a = 1$ gilt. Anschließend wird gezeigt, dass $T(n) \leftrightarrow T(2n)$ gilt. Auf diese Weise wird für jede natürliche Zahl $n$ eindeutig bestimmt, ob $T(n)$ gilt, da man (13) so oft anwenden kann, bis man eine ungerade Zahl vorliegen hat. $T(n)$ gilt genau dann, wenn die entstehende ungerade Zahl 1 ist. Dies bestätigt die Vermutung (8).

## 2.4 Induktionsanfang

Für ungerade $n = 2k + 1$ gilt (9).

$$\Delta_{n-1} \equiv \frac{(n-1)n}{2} \equiv \frac{2kn}{2} \equiv kn \equiv 0 \equiv \Delta_0 \mod n \tag{9}$$

Wegen $\Delta_n = n + \Delta_{n-1}$ gilt auch $\Delta_0 \equiv \Delta_n \mod n$. Da die Zunahme der Dreieckszahlen um $n+k$ modulo $n$ einer Zunahme um $k$ äquivalent ist, kann man schließen, dass $\Delta_{n+k} \equiv \Delta_k \mod n$. Die Dreieckszahlen sind also modulo $n$ periodisch mit Periodenlänge $n$.

Auf die Menge $G_n$ bezogen heißt dass, das für Indizes der Dreieckszahlen größer als $n-1$ keine weiteren Elemente hinzu kommen können. Alle Elemente werden aus den Indizes $0 \ldots n-1$ erzeugt. Damit $T(n)$ gilt, müssen alle Dreieckszahlen $\Delta_0 \ldots \Delta_{n-1}$ paarweise verschieden sein, weil sonst $G_n$ weniger als $n$ Elemente enthält.

Für ungerade $n$ ist aber gemäß (9) $\Delta_0 = \Delta_{n-1}$. Für $n > 1$ bedeutet dies, das $T(n)$ falsch ist. Für $n = 1$ ist $n - 1 = 0$, wie man durch händische Ausführung des Algorithmus überprüfen kann, gilt $T(1)$. Es folgt (10). *q. e. d.*

$$n = 2k + 1 \rightarrow (n = 1 \leftrightarrow T(n)) \tag{10}$$

## 2.5 Induktionsschritt

Wir betrachten ein gerades $n = 2b$. Die Menge $G_n$ muss eine Teilmenge der Menge $G'_n = \{k, k + b | k \in G_b\}$ sein: Für jedes $z \in G_n$ gibt es per Definition ein $i$, sodass $\Delta_i \equiv z \mod n$ ist. Der Rest, den $\Delta_i$ modulo $b$ lässt muss aber per Definition in $G_b$ enthalten sein. Der Rest modulo $n$ ist nach den Gesetzen der Modulo-Arithmetik entweder $k$ oder $k + b$ sein.

Es gilt die Aussage (11):

$$2\Delta_{n-k-1} \equiv (n - k - 1)(n - k) \equiv 2n^2 - 2nk + k^2 + k - n \equiv 2(\Delta_k + b) \mod 2n \tag{11}$$

Halbiert man beide Seiten von (11), dann sagt diese aus, dass $\Delta_k \equiv \Delta_{n-k-1} + n \mod n$. Man kann damit für jedes $k \in G_b$ mit Index $i$ zeigen, dass $\{k, k + b\} \subset G_n$, weil entweder $\Delta_i \equiv k \mod n$ und $\Delta_{n-i-1} \equiv k+b \mod n$ oder umgekehrt ist. Daraus folgt $G'_n = G_n$, $\#G_n = 2 \cdot \#G_b$:

$$T(n) \leftrightarrow \#G_n = n \leftrightarrow 2 \cdot \#G_b = 2b \leftrightarrow T(b) \tag{12}$$

Es folgt Aussage (13). *q. e. d.*

$$T(n) \leftrightarrow T(2n) \tag{13}$$

# 3 Aufgabe 3

## 3.1 Vermutung

Sei $k$ der Inkreis eines Dreiecks $\triangle ABC$ mit Mittelpunkt $M$, seien $A_1$, $B_1$ und $C_1$ die Berührpunkte von $k$ mit den Seiten $BC$, $AC$ und $AB$ entsprechend. $D$ sei der Bildpunkt von $C_1$ gespiegelt an $M$, $E$ sei der Schnittpunkt der Geraden $AD$ und $BC_1$. Es wird vermutet, dass $|CE| = |CB_1|$.

## 3.2 Beweis

Sei $\alpha = \angle BAC$, analog seien $\beta = \angle CBA$ und $\gamma = \angle ACB$. Weil $C_1D$ ein Durchmesser des Innkreises ist, ist $\angle EA_1C_1$ nach dem Satz des Thales ein rechter Winkel. Aus der Formelsammlung ist bekannt[1], dass (14) und (15) gelten. Die Stecken $MA_1$, $MB_1$ und $MC_1$ sind Radien des Innkreises, deshalb sind die Dreiecke $\triangle B_1C_1M$ und $\triangle A_1MC_1$ gleichschenklig mit $M$ als Spitze. Es folgen (16) und (17) für die Größen der Basiswinkel. Der Betrag des Winkels $\zeta = \angle A_1C_1E$ ist die Summe jener Basiswinkel. Er ist in (18) zu finden.

$$\angle B_1MC_1 = \beta + \gamma \tag{14}$$
$$\angle C_1MA_1 = \alpha + \gamma \tag{15}$$
$$\angle MC_1B_1 = 90° - \frac{\beta + \gamma}{2} = \frac{\alpha}{2} \tag{16}$$
$$\angle A_1C_1M = 90° - \frac{\alpha + \gamma}{2} = \frac{\beta}{2} \tag{17}$$
$$\zeta = \angle MC_1B_1 + \angle A_1C_1M = \frac{\alpha + \beta}{2} = 90° - \frac{\gamma}{2} \tag{18}$$
$$\varepsilon = 90° - \zeta = \frac{\gamma}{2} \tag{19}$$

Ich betrachte nun das wie oben festgestellt rechtwinklige Dreieck $\triangle A_1C_1E$ mit rechtem Winkel in $A_1$. $\zeta$ und $\varepsilon = \angle C_1EA_1$ addieren sich zu 180°. Daraus folgt (19). Laut Formelsammlung[2] ist $|CA_1| = |CB_1|$. Damit existiert ein Kreis $k_C$ um $C$ durch die Punkte $A_1$ und $B_1$. $E$ liegt nach dem Mittelpunktswinkelsatz genau dann auf der Peripherie von $k_C$, wenn $2\varepsilon = \gamma$. Dies ist nach (19) der Fall. Weil $CE$ nun ein Radius von $k_C$ ist, gilt $|CE| = |CB_1|$. *q. e. d.*

[1] Geometrische Formelsammlung, Satz 4.66
[2] Geometrische Formelsammlung, Satz 4.65

# 4 Aufgabe 4

Sei $Z = \{(a, b) | a, b \in \mathbb{Z}\}$ die Menge aller ganzzahliger Punkte. Sei $\square ABCD$ die Menge aller Punkte, Rand eingeschlossen, die in einem Rechteck mit Eckpunkten $A$, $B$, $C$ und $D$ enthalten sind. Sei $|AB|$ der Abstand zwischen den Punkten $A$ und $B$. Eine Figur sei *plazierbar*, wenn sie derartig verschieb- und drehbar ist, dass sie keinen der Punkte aus $Z$ enthält oder berührt.

## 4.1 Vermutung

Es existiert zu jedem Paar positiver reeller Zahlen $a < b$ genau dann ein plazierbares Rechteck $\square ABCD \cap Z = \emptyset$ mit $|AB| = |CD| = a$ und $|BC| = |AD| = b$, wenn (20) gilt.

$$a < 1 \lor b < \sqrt{2} \tag{20}$$

## 4.2 Beweis

Der nachfolgende Beweis besteht aus zwei Teilen. Zum einen zeige ich, dass für jede Längen $a$ und $b$, welche die Bedingung (20) erfüllen, ein Rechteck der Maße $a \times b$ plazierbar ist, zum anderen zeige ich, dass dies für alle anderen Maße unmöglich ist.

## 4.3 Aus (20) folgt Plazierbarkeit des Rechtecks

Für den Fall $a < 1$ kann man das Rechteck (21) wählen. Da dieses genau zwischen zwei Reihen von ganzzahligen Punkten liegt, kann kein ganzzahliger Punkt auf dem Rechteck liegen. Für den Fall $b < \sqrt{2}$ wählt man ein Rechteck, dass im Rechteck (22) derartig liegt, dass es den Rand nicht berührt. Weil die Abmessungen des Quadrates (22) $\sqrt{2} \times \sqrt{2}$ betragen, ist dies stets möglich. Das Rechteck (22) berührt mit seinem Rand vier ganzzahlige Punkte, da man aber das Rechteck derart hineinlegt, dass es den Rand nicht berührt, ist dies unerheblich.

$$\square \left(0, \tfrac{1-a}{2}\right) \left(0, \tfrac{1+a}{2}\right) \left(1, \tfrac{1+a}{2}\right) \left(1, \tfrac{1-a}{2}\right) \tag{21}$$

$$\square \left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right) \left(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right) \left(\tfrac{3}{2}, \tfrac{1}{2}\right) \left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}\right) \tag{22}$$

## 4.4 Umgekehrter Fall

Wenn (20) nicht zutrifft, dann und nur dann tritt Aussage (23) ein. Ich beweise durch Widerspruch. Es sei angenommen, dass $\square ABCD$ ein plaziertes Rechteck sei, welches (23) erfüllt. Da beide Längen größer oder gleich 1 sind, kann das Rechteck nicht parallel zur x-Achse liegen: Da ein Rechteck mit $a > 1$ einen Flächeninhalt größer 1 hat, muss es in mindestens zwei von Punkten aus $Z$ gebildeten Einheitsquadraten mit Flächeninhalt 1 liegen. Ein Rechteck muss dabei die gedachte Linie zwischen adjazenten Eckpunkten des Quadrates zwangsläufig irgendwo durchbrechen, diese haben eine Länge von 1. Da das Rechteck aber parallel zur x-Achse liegen soll, und alle Seiten länger als 1 sind, ist dies nicht möglich.

$$a \geq 1 \land b \geq \sqrt{2} \tag{23}$$

Das verdrehte Rechteck muss zwischen vier ein Einheitsquadrat bildenden, ganzzahligen Punkten liegen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man annehmen, dass der Diagonalenschnittpunkt des Rechteckes auf dem Diagonalenschnittpunkt jenes Einheitsquadrates (dem Mittelpunkt $M$) liegt: Wäre es nicht so, dann kann das, am weitesten von $M$ entfernt liegende Paar von verbunden Rechteckseckpunkten an diesem spiegeln, und erhält ein Rechteck, dessen Diagonalenschnittpunkt auf $M$ liegt, das keinen der ganzzahligen Punkte enthält und größere Abmessungen als das ursprüngliche Rechteck ist.

Falls $\square ABCD$ kein Quadrat ist, ist es immer möglich, dieses in ein plazierbares Quadrat einzubetten. Man betrachte die zwölfeckige Überlagerung des Rechteckes mit einer um 90° um den Mittelpunkt rotierten Kopie. Diese Figur bildet ein Qudrat bis auf vier kleine, fehlende Quadrate. Diese können jedoch nie ganzzahlige Punkte enthalten, weil die umgebenden ganzzahligen Punkte jeweils gegenüber einer der konvexen Seiten (der im ursprünglichen Rechteck kürzeren) und damit außerhalb des entstehenden Quadrates liegen.

Es ist immer möglich, das entstandende Quadrat in ein größeres einzubetten, dessen Abstand $\varepsilon > 0$ von den umgebenden ganzzahligen Punkten beträgt. Unterteilt man dieses entlang der Kanten des umgebenden Einheitsquadrates, so entstehen ein Achteck mit Flächeninhalt $A_8 < 1$ und vier aufgesetzte, rechtwinklige Dreiecke. Deren Katheten haben die Seitenlängen $c$ und $d$, aufgrund der Drehsymmetrie ergänzen sich die beiden Kathenstücke zusammen mit dem kleinen Teil innerhalb des Einheitsquadrates fast zu $b$: $d < b - c$.

Der Flächeninhalt eines solcher Dreiecke beträgt $A_\triangle = cd \leq c(b-c) = bc - c^2$. Da jene Dreiecke rechtwinklig sein müssen, gilt außerdem $c^2 + d^2 < 1$ nach dem Satz des Pythagoras. Ich nehme im Folgenden an, dass das Quadrat die vier ganzzahligen Eckpunkte des Einheitsquadrates berührt. Unter dieser Annahme ist dann $c + d = b$ und $c^2 + d^2 = 1$. Das Maximum von $A_\triangle(c) = \frac{1}{2}c\sqrt{1-c^2}$ liegt an der Stelle $c = \frac{\sqrt{2}}{2}$ und beträgt $\frac{1}{4}$. Aufsummiert für das gesammte Quadrat ergibt dies $4A_\triangle + 1 = 2$. Dieser Flächeninhalt wir von einem Quadrat eingenommen, dessen Seitenlängen $\sqrt{2}$ betragen. Ein Quadrat diesen oder größeren Inhaltes ist nicht ohne Berührung ganzzahliger Punkte auf die Ebene zu plazieren. Da, wie oben bereits festgestellt, sich jedes plazierbare Rechteck in ein plazierbares Quadrat einbetten lässt, ist es für $a \geq 1 \wedge b \geq \sqrt{2}$ niemals möglich, das Quadrat zu plazieren. *q. e. d.*