... und noch einmal: KEPLERsche Fassregel [1]

Die KEPLERsche Fassregel ist ein Näherungsverfahren für Integrale. Auszuwerten ist $\int_a^b f(x)\ dx$ für eine integrierbare Funktion f und Grenzen a und b. Die Idee der Regel ist es, f zwischen a und b durch eine quadratische Funktion p anzunähern. Diese soll zumindest an den Stützstellen a, b und $\frac{a+b}{2}$ mit f übereinstimmen, also
$y_a := f(a) = p(a)$, $y_m := f\left(\frac{a+b}{2}\right) = p\left(\frac{a+b}{2}\right)$ und $y_b := f(b) = p(b)$.
Damit ist $\int_a^b p(x)\ dx$ eine gute Näherung für das Integral über f. Man kann das Integral durch Substitution berechnen:

$$t = 2 \cdot \frac{x-a}{b-a} \Leftrightarrow x = \frac{b-a}{2} \cdot t + a =: \varphi(t)$$

Es ist $\varphi(0) = a$, $\varphi(1) = \frac{a+b}{2}$, $\varphi(2) = b$ und $\varphi'(t) = \frac{b-a}{2}$. Es ist nun ausreichend, die Koeffizienten c_1, c_2 und c_3 des Polynoms $p \circ \varphi : [0;2] \to \mathbb{R}$ mit $(p \circ \varphi)(t) = c_1 t^2 + c_2 t + c_3$ zu berechnen. Weil $y_a = p(a) = (p \circ \varphi)(0) = c_3$ ist, ist das Gleichungssystem wesentlich einfacher zu lösen als jenes, welches ohne Substitution entsteht:

$$\begin{cases} & & & & & c_3 & = & y_a \\ \wedge & c_1 & + & c_2 & + & c_3 & = & y_m \\ \wedge & 4c_1 & + & 2c_2 & + & c_3 & = & y_b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} & c_1 & = & \frac{1}{2}y_a & - & y_m & + & \frac{1}{2}y_b \\ \wedge & c_2 & = & -\frac{3}{2}y_a & + & 2y_m & - & \frac{1}{2}y_b \\ \wedge & c_3 & = & y_a & & & & \end{cases}$$

Zwangloses Integrieren liefert:

$$\begin{aligned} \int_{\varphi(0)}^{\varphi(2)} p(x)\ dx &= \int_0^2 p(\varphi(t))\varphi'(t)\ dt \\ &= \int_0^2 p(\varphi(t))\frac{b-a}{2}\ dt \\ &= \frac{b-a}{2} \int_0^2 \left(c_1 t^2 + c_2 t + c_3\right)\ dt \\ &= \frac{b-a}{6}\left[8c_1 + 6c_2 + 6c_3\right] \\ &= \frac{b-a}{6}\left[y_a + 4y_m + y_b\right] \\ &= \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right] \end{aligned}$$

Der letzte Term $\frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$ ist eine gute Näherung für $\int_a^b f(x)\ dx$: KEPLERsche Fassregel .

[1] Idee von Robert Clausecker 2012